3.7.3 Mnohočleny I

Předpoklady: 030702

Pedagogická poznámka: V hodině ukazuji hned první příklad. Pokud se nikdo nezeptá, co je mnohočlen, ptám se sám (určitě si to někdo nepamatuje). Následující diskusi však velmi rychle směřuji k cíli, abych neztrácel čas na jiné (důležitější) věci. Maximálně si napíšeme pár příkladů jednočlenů a „nejednočlenů", které rychle přetřídíme a z nich rychle sestavíme definici.

Co je mnohočlen?
Všechno, co se dá zapsat jako součet jednočlenů.

Co je jednočlen?
Jednočlen je výraz, který se dá napsat jako:
- číslo,
- proměnná,
- součin čísel a proměnných.

Číslo, které se vyskytuje v jednočlenu, označujeme jako **koeficient**.

Př. 1: Zapiš mnohočleny obvyklým (kompaktním) způsobem.
a) $(-4)\cdot x\cdot x\cdot x-2\cdot x\cdot x+5\cdot x-7$
b) $3\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y-5x\cdot x^2+1\cdot x\cdot x-0\cdot x\cdot y+3y^3$

a) $(-4)\cdot x\cdot x\cdot x-2\cdot x\cdot x+5\cdot x-7=-4x^3-2x^2+5x-7$

b) $3\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y-5x\cdot x^2+1\cdot x\cdot x-0\cdot x\cdot y+3y^3=3x^2y^2-5x^3+x^2+3y^3$

Pedagogická poznámka: Objevují se snahy v bodě b) spojit členy $3x^2y^2$ a x^2 (oba obsahují x^2). V takovém případě doporučuji nechat otestovat výsledek (nečastěji $4x^2y^2$ dosazením konkrétních čísel. Například $x=1,\ y=2$:
$3x^2y^2+x^2=3\cdot1^2\cdot2^2+1^2=12+1=13$
$4x^2y^2=4\cdot1^2\cdot2^2=16$.
Z výsledků je ihned zřejmé, že $4x^2y^2$ není to samé jako $3x^2y^2+x^2$.

Př. 2: Urči hodnotu mnohočlenu $-x^3+2x^2-3$ pro: a) $x=3$, b) $x=-2$, c) $x=0$.

Mocnina má přednost před násobením (protože je zkráceným zápisem násobení).
a) $x=3$
$-x^3+2x^2-3=-3^3+2\cdot3^2-3=-27+18-3=-12$

b) $x=-2$
$-x^3+2x^2-3=-(-2)^3+2\cdot(-2)^2-3=8+8-3=13$

c) $x=0$
$-x^3+2x^2-3=-0^3+2\cdot 0^2-3=-3$

Pedagogická poznámka: Opět se objevují problémy s dosazením -2. Rada je stejná jako obvykle – psát závorky a dodržovat pořadí operací.

Př. 3: Popiš, jak sčítáme mnohočleny.

Při sčítání mnohočlenů sečteme koeficienty před členy stejného typu.

Pedagogická poznámka: Řešení předchozího příkladu necháme přečíst několik žáků (třeba třetinu třídy). Tím získáme dva druhy pravidel: „sčítáme stejné jednočleny“, „sčítáme jednočleny stejného typu“. Pak někdo vysvětlí, že mezi „stejné“ a „stejného typu“ je velký rozdíl (a ti, co psali „stejné“ většinou zjistí, že mysleli „stejného typu“.

Př. 4: Sečti mnohočleny.
a) $x^2-3x+1+2x^3+3x-2$ b) $-5x^3+4x^2-2+\left(-3x^3+5x-5\right)$
c) $x\cdot x^2-\frac{1}{3}x^2+0,5x+2x^2-x+5$

a) $x^2-3x+1+2x^3+3x-2=2x^3+x^2-1$

b) $$-5x^3+4x^2-2+\left(-3x^3+5x-5\right)=-5x^3+4x^2-2-3x^3+5x-5=$$
$$-8x^3+4x^2+5x-7$$

c) $$x\cdot x^2-\frac{1}{2}x^2+0,5x+2x^2-x+5=x^3-\frac{1}{3}x^2+2x^2-0,5x+5=$$
$$=x^3+\frac{5}{3}x^2-0,5x+5$$

Pedagogická poznámka: Občas se objeví žák, který má problém se závorkou v bodu b). Nejdřív zkoušíme závorku odstraňovat jako u mínusu:
$-5x^3+4x^2-2+\left(-3x^3\right)+\left(+5x\right)+\left(-5\right)$ z čehož ihned vyplyne, že plus před závorkou nic nemění a může se bez obav vypustit.

Př. 5: Urči součet a rozdíl mnohočlenů $-x^2+3x-5$ a $2x^3+3x^2-7x-2$.

Součet: $-x^2+3x-5+2x^3+3x^2-7x-2=2x^3+2x^2-4x-7$.

Rozdíl: $$-x^2+3x-5-\left(2x^3+3x^2-7x-2\right)=-x^2+3x-5-2x^3-3x^2+7x+2=$$
$$=-2x^3-4x^2+10x-3$$

Pedagogická poznámka: Objevují se dotazy na to, co vlastně mají žáci udělat. První radou je vypočítat součet a rozdíl pro dvě konkrétní čísla.

Př. 6: Michal i jeho táta se narodili v lednu ve stejný den. Když Michal slavil v roce 2014 narozeniny, dával účastníkům oslavy spočítat číslo, které vznikne jako součet roků narození jeho a táty a jejich věku. Urči toto číslo.
Pokud se Ti nepodaří během tří minut najít řešení, zkus vyřešit následující příklad.

Zdá se, že příklad je neřešitelný (nejsou uvedeny roky narození ani u táty ani u Michala). Zkusíme si zvolit konkrétní rok narození a spočteme výsledek, třeba si něčeho všimneme.

Rok narození táty například 1980 $\Rightarrow$ v roce 2014 mu bylo 34 let $\Rightarrow$ součet $1980+34=2014$.
Rok narození Michala například 2004 $\Rightarrow$ v roce 2014 mu bylo 10 let $\Rightarrow$ součet $2004+10=2014$.
Celkový součet: $2014+2014=4028$.

Postřeh: u táty i u Michala jsme získali číslo 2014 (rok, ve kterém se výpočet prováděl). Zřejmě to tak bude vždy (nevolili jsme žádné speciální letopočty).
Zdůvodnění: U táty i Michala sčítáme rok narození s věkem $\Rightarrow$ musíme získat číslo 2014 (věk kohokoliv je rozdíl mezi aktuálním rokem a rokem jeho narození).

Př. 7: Vyřeš předchozí příklad pomocí proměnných. Označ si rok narození Michala *m* a rok narození táty *t*. Vysvětli, jak hádanka funguje.

Táta:

- rok narození: t,
- věk v roce 2014: $2014-t$.

Michal:

- rok narození: m,
- věk v roce 2014: $2014-m$.

Součet všech čtyř údajů: $t+2014-t+m+2014-m=2014+2014=4028$.

Bez ohledu na skutečný rok narození táty i Michala vyjde v roce 2014 součet jejich dat narození a věků 4028, protože při výpočtu se číslo udávající jejich věk odečte od čísla, které udává rok narození (o kolik je jejich věk větší, o tolik je datum narození menší, pokud tato dvě čísla sečteme, získáme rok, ve kterém výpočet provádíme, v našem případě 2014).

Př. 8: Děti si porovnávají počty vrásek z matematiky. Jako první svůj počet zveřejnila Zuzka (značíme *z*). Zapiš pomocí proměnné *z* kolik vrásek má,
a) Adam, jestliže Zuzka má o dvě víc,
b) Bára, která má třikrát méně než Zuzka,
c) Cilka, která má o třetinu více než Zuzka,
d) Dan, který má o patnáct procent méně než Zuzka,
e) Eva, která by měla dvakrát víc, kdyby měla Zuzka o jednu méně.

a) Adam, jestliže Zuzka má o dvě víc: $a=z-2$,

b) Bára, která má třikrát méně než Zuzka: $b = \frac{z}{3}$,

c) Cilka, která má o třetinu více než Zuzka: $c = z + \frac{1}{3}z = \frac{4}{3}z$,

d) Dan, který má o patnáct procent méně než Zuzka: $d = z - \frac{15}{100}z = 0{,}85z$,

e) Eva, která by měla dvakrát víc, kdyby měla Zuzka o jednu méně: $e = 2(z-1)$.

Př. 9: Na co si musíme dávat pozor při sestavování výrazů ze slovního zadání?

Při vyjadřování pomocí částí a procent musí být vždy část nebo procento z něčeho, nejde o samotná čísla:

- Petra má o třetinu více než Jana: $p = j + \frac{1}{3}j = \frac{4}{3}j$,
- Radek má o 15 % méně než Marek: $r = m - \frac{15}{100}m = 0{,}85m$.

Př. 10: Zjednoduš.

a) $2a-(a-2b)$

b) $3x-(2x+x+1)$

c) $a^2-3a+7-(-2a^2+3a+1)$

d) $x^2-(x^2-[1-x^2])$

e) $a^2-2ab+(-ab)-(-2ab)+(-a^2)$

f) $x^2-2x-(2-3x-[1-x^2-\{2x-3\}])$

a) $2a-(a-2b)=2a-a+2b=a+2b$

b) $3x-(2x+x+1)=3x-(3x+1)=3x-3x-1=-1$

c) $a^2-3a+7-(-2a^2+3a+1)=a^2-3a+7+2a^2-3a-1=3a^2-6a+6$

d) $x^2-(x^2-[1-x^2])=x^2-(x^2-1+x^2)=x^2-(2x^2-1)=x^2-2x^2+1=-x^2+1$

e) $a^2-2ab+(-ab)-(-2ab)+(-a^2)=a^2-2ab-ab+2ab-a^2=-ab$

f)
$$x^2-2x-(2-3x-[1-x^2-\{2x-3\}])=x^2-2x-(2-3x-[1-x^2-2x+3])=$$
$$=x^2-2x-(2-3x-[4-x^2-2x])=x^2-2x-(2-3x-4+x^2+2x)=x^2-2x-(x^2-x-2)=$$
$$=x^2-2x-x^2+x+2=-x+2$$

Shrnutí: